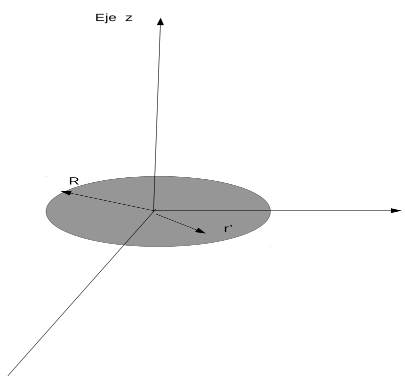
Campo Eléctrico de un Disco y de una Corona cargada uniformemente en el eje de simetria
Problema tipo 8

Calcularemos el campo del disco y de la corona en el eje de simetria. Para eso usamos la formula general

$$\vec{E} = k \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}|^3} dq' \tag{1}$$

donde k es la constante de Coulomb $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. El dato es la densidad de carga σ
$\vec{r}$: punto-campo , $\vec{r}'$:punto fuente

Para el disco:



$$\vec{r} = (0, 0.z)$$
$$\vec{r}' = (r' \cos\theta', r' \sin\theta', 0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-r' \cos\theta', -r' \sin\theta', z)$$
$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r'^2 (\cos\theta')^2 + r'^2 (\sin\theta')^2 + z^2$$

$$|\vec{r} - \vec{r}|^3 = (r'^2 + z^2)^{3/2}$$

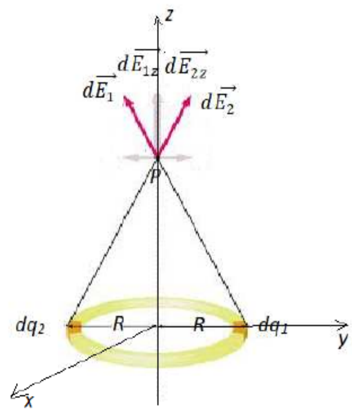
En el caso del disco, la integral es de superficie.

$$dq' = \sigma ds'$$
$$dq' = \sigma r' dr' d\theta'$$

queda

$$E = k \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(-r' \cos\theta', -r' \sin\theta, z)}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' \sigma d\theta' \tag{2}$$

Antes de hacer la cuenta veamos que puedo sacar por simetria. (El disco es coo una sucesion de anillos)



$$E_x = \sigma \int_0^{2\pi} \cos\theta' d\theta * \int_o^R \frac{r'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} r'dr' = 0$$
$$E_y = 0$$
$$E_z = k\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{z}{(r'^2+z^2)^{3/2}} r'dr'd\theta'$$

se suele definir la constante $\epsilon_0 = 1/(4\pi K)$ (Permeabilidad Dieléctrica de vacio)

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}] \tag{3}$$

conviene definir la función:

$$sg(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}[sg(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}] \tag{4}$$

Exactamente de la misma forma podemos calcular el campo de una corona (cual es la diferencia ?):

$$E = k\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{(-r'\cos\theta', -r'\sin\theta, z)}{(r'^2+z^2)^{3/2}} r'dr'\sigma d\theta' \tag{5}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}[\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}] \tag{6}$$

Plano Infinito (si el radio es muy garnde , no veo el borde):

$$E_{plano-\infty} = \lim_{R\to\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}[sg(z) - \frac{z}{\sqrt(R^2 + z^2)}] \tag{7}$$

Entonces:

$$E_{plano-\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} sg(z) \tag{8}$$